

# Wykorzystanie geometrii fraktalnej do określenia odporności na pękanie betonu modyfikowanego metakaolinitem

Janusz Konkol<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Katedra Inżynierii Materiałowej i Technologii Budownictwa, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Rzeszowska, e-mail: [janusz.konkol@prz.edu.pl](mailto:janusz.konkol@prz.edu.pl)*

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono wyniki badań betonów z dodatkiem metakaolinitu (MK), jako częściowego substytutu cementu. Przeprowadzono badania wytrzymałościowe i fraktalne po 180 dniach dojrzewania, określając: wytrzymałość na ściskanie  $f_c$ , odporności na pękanie (krytyczny współczynnik intensywności naprężeń  $K_{Ic}$ ) i wymiar fraktalny. Badania zaprogramowano według kompozycyjnego centralnego planu eksperymentu, przyjmując jako zmienne niezależne stosunek woda/spoiwo oraz udział dodatku w stosunku do masy spoiwa. Na podstawie uzyskanych wyników badań i przeprowadzonych analiz wykazano statystycznie istotny związek morfologii przełomu oraz składu betonów z odpornością na pękanie.

**Słowa kluczowe:** beton, odporność na pękanie, wymiar fraktalny, metakaolinit.

## 1. Wprowadzenie

Rok 1975 okazał się przełomowym w wielu dziedzinach nauki i sztuki, był on bowiem początkiem nowego działu matematyki nazwanego geometrią fraktalną [1]. Prekursorem powstałej nauki jest, urodzony w Warszawie w 1924 roku, francuski matematyk Benoit Mandelbrot. Lata 80. XX wieku i późniejsze to okres dynamicznego rozwoju i dużego zainteresowania tym nowym podejściem do opisu różnorodnych zjawisk. Popularność geometrii fraktalnej trwa nadal. Najlepszym tego przykładem jest internet. Jedną z popularnych przeglądarek Google znajduje około 53,5 mln stron z wyrażeniem „fractal”. W porównaniu do około 350 mln stron z wyrażeniem „concrete” jest to liczba imponująca. Zainteresowanie fraktalami występuje również w nauce. Liczba publikacji naukowych, znajdujących się w bazie elektronicznej, wydawnictwa Elsevier ze słowem „fractal” to prawie 72 tys. pozycji na prawie 260 tys. publikacji ze słowem „concrete”.

Geometria fraktalna pozwala na poszerzenia dotychczas ograniczonego pojęcia wymiaru. Przedziały pomiędzy wymiarami topologicznymi 0; 1; 2 i 3 wypełnia wymiar fraktalny [2]. Na przykład krzywa lepiej wypełnia płaszczyznę, aniżeli linia prosta, zatem jej wymiar fraktalny będzie z zakresu pomiędzy 1 a 2.

Geometria fraktalna znalazła również zastosowanie w badaniach betonów [4-19]. Początkowo badania dotyczyły zaczynów [3], a później również betonów [4]. Jednym z powodów zainteresowania geometrią fraktalną badaczy, zajmujących się badaniami materiałów z matrycą cementową, jest chęć wyjaśnienia i opisu zjawiska pękania. Saouma i Barton [4] jako pierwsi podali zależności łączące wymiar fraktalny z parametrami mechaniki pękania: energią pękania oraz krytycznym współczynnikiem intensywności naprężeń, ujmując uzyskane relacje w postaci zależności liniowej. Wzrost wymiaru fraktalnego powodował spadek parametrów mechaniki pękania. Kolejne propozycje tych zależności przedstawiono w pracach [5-15].

Ograniczenie zużycia cementu przy uzyskaniu betonów o pożądanych właściwościach i trwałości możliwe jest dzięki zastosowaniu dodatków o właściwościach pucolanowych, takich jak metakaolinit, który wytwarzany jest w kontrolowanym procesie kalcynacji kaolinitu w temperaturze 500-800 °C. Badania prowadzone już od prawie dwudziestu lat potwierdzają korzystne działanie tego dodatku na właściwości betonów [20-29].

Jednocześnie celowe jest prowadzenie badań z uwzględnieniem parametrów mechaniki pękania w powiązaniu z analizą skutków procesu pękania w postaci uzyskanych

powierzchni przełomów, co może przyczynić się do zrozumienia i opisu zjawiska pękania betonów modyfikowanych metakaolinitem.

## 2. Program badań i uzyskane wyniki

Badania zaprogramowano według dwuczynnikowego centralnego kompozycyjnego planu eksperymentu (poliselekcyjnego rotalnie-quasi-uniformalnego). Zmiennymi w planie był stosunek woda/spoiwo  $w/s$  w zakresie od 0,35 do 0,54 oraz udział metakaolinitu w łącznej masie spoiwa  $MK/s$  wynoszący od 2,1 do 14,9 % (tj. od 2,2 do 17,5 % masy cementu). Przyjęto pięć pośrednich wartości wielkości wejściowych zmiennych  $w/s$  i  $MK/s$ , wyznaczonych dla wartości unormowanych wynoszących 0,  $\pm 1$ ,  $\pm \alpha$  (dla planu dwuczynnikowego  $\alpha = 1,414$ ).

Do badań zastosowano cement portlandzki CEM I 32,5R, kruszywo grube bazaltowe frakcji do 16 mm, piasek płukany frakcji do 2 mm oraz metakaolinit *Astra MK40*, zawierający 53 %  $SiO_2$  i 42 %  $Al_2O_3$ , uwzględniony po stronie spoiwa ( $k = 1$ ).

Skład mieszanek betonowych podano w Tab. 1. W przypadku wszystkich mieszanek betonowych utrzymywaną stałą konsystencję, dzięki zastosowaniu odpowiedniej ilości superplastyfikatora FM-6. W badaniu konsystencji metodą stolika rozpląwowego uzyskano rozpląw wynoszący 410 mm $\pm$ 20mm. Wykonano również mieszanki bez dodatku metakaolinitu o stosunku wodno-cementowym wynoszącym 0,35 (B03) i 0,54 (B05). Łącznie zrealizowano 11 receptur mieszanek betonowych.

Tabela 1. Zestawienie składników mieszanek betonowych

Seria	Zmienna		Skład mieszanki betonowej według przyjętego planu w [kg]				
	$w/s$	$MK/s$	Spoiwo	Cement	MK-40	Woda	Kruszywo
1	0,380	0,04	454	435,8	18,2	172,5	piasek 739,3
2	0,380	0,13		395,0	59,0	172,5	
3	0,510	0,04		435,8	18,2	231,5	
4	0,510	0,13		395,0	59,0	231,5	
5	0,353	0,085		415,4	38,6	160,3	bazalt 1212,5
6	0,537	0,085		415,4	38,6	243,8	
7	0,445	0,021		444,3	9,7	202,0	
8	0,445	0,149		386,5	67,5	202,0	
9	0,445	0,085		415,4	38,6	202,0	

Badania wytrzymałościowe przeprowadzono po 180 dniach dojrzewania próbek przechowywanych w warunkach powietrzno-wilgotnych przy wilgotności względnej powietrza  $>95\%$ . Badania obejmowały określenie wytrzymałości na ściskanie  $f_c$  oraz krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$  (Tab. 2). Wyniki badań  $f_c$  i  $K_{Ic}^S$  po 28 dniach dojrzewania zamieszczono w publikacji [15].

Do badań wytrzymałości na ściskanie  $f_c$  użyto 104 kostek sześciennych o boku 0,1 m, w tym 82 z betonu modyfikowanego metakaolinitem i 22 z betonu bez dodatku.

Krytyczny współczynnik intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$ , według I modelu, wyznaczono na 44 belkach (po 4 belki dla każdej serii betonów) o wymiarach 0,08 $\times$ 0,15 $\times$ 0,70 m ze szczeliną pierwotną [30,31], w tym 36 belkach wykonanych z betonu zawierającego metakaolinit i 8 bez dodatku.

Badania fraktalne przeprowadzono na 220 liniach profilowych wydzielonych z 2 losowo wybranych powierzchni przełomów, dla każdej serii betonów (po 10 linii profilowych dla jednej powierzchni przełomu) przy użyciu profilometru laserowego *Talysurf CLI 1000* firmy *Taylor Hobson* do szybkiego bezstykowego pomiaru topografii powierzchni 3D oraz programu *FRAKTAL Wymiar2D*. Linie profilowe odwzorowano z krokiem dyskretyzacji 5  $\mu m$ . Wymiar fraktalny  $D_m$  obliczono metodą obwiedni morfologicznych (*morphological envelopes method*), polegającej na wyznaczeniu górnej i dolnej obwiedni za pomocą przekształceń morfologicznych otwarcia i zamknięcia przy użyciu elementu strukturalnego w postaci poziomego odcinka o długości  $\varepsilon_i$ . Następnie oblicza się pole powierzchni  $A(\varepsilon_i)$  ograniczone górną i dolną obwiednią. Procedura jest powtarzana przy elementach strukturalnych o różnych długościach w celu wykreślenia wykresu zależności  $\ln A(\varepsilon_i)$  od  $\ln (\varepsilon_i)$ . Współczynnik kierunkowy otrzymanej zależności

liniowej określa wymiar fraktalny  $D_m$ . Uzyskane wyniki analizy fraktalnej zamieszczono w Tab. 2.

Tabela 2. Wyniki badań wytrzymałościowych betonów oraz wymiaru fraktalnego po 180 dniach

Seria betonu	$f_c \pm$ błąd stand. [MPa] (liczba próbek)	$K_{Ic}^S \pm$ błąd stand. [MN/m <sup>3/2</sup> ]	$D_m \pm$ błąd stand. [-]
1	78,5±1,47 (8)	1,604±0,071	1,121±0,0046
2	81,0±1,71 (8)	1,692±0,082	1,132±0,0038
3	55,6±0,73 (8)	1,288±0,032	1,151±0,0052
4	58,0±0,83 (8)	1,394±0,057	1,137±0,0037
5	82,7±1,95 (11)	1,722±0,053	1,107±0,0032
6	54,2±0,79 (11)	1,311±0,055	1,154±0,0053
7	66,9±1,00 (8)	1,455±0,037	1,141±0,0049
8	69,0±0,79 (12)	1,564±0,059	1,103±0,0029
9	67,9±1,58 (8)	1,551±0,069	1,127±0,0031
B03	76,3±2,16 (11)	1,649±0,069	1,116±0,0044
B05	56,7±0,77 (11)	1,204±0,061	1,148±0,0040

### 3. Analiza wyników badań

Modifikacja betonu dodatkiem metakaolinitu, jako częściowego substytutu cementu, spowodowała wzrost  $f_c$  i  $K_{Ic}^S$  w stosunku do betonu kontrolnego bez dodatku zarówno po 28, jak i 180 dniach dojrzewania.

Na podstawie porównania wyników badań wytrzymałościowych  $f_c$  i  $K_{Ic}^S$  po 28 [15] i 180 dniach dojrzewania (Tab. 2) stwierdzono wzrost wytrzymałości na ściskanie  $f_c$  od 29,8 % (seria 5:  $w/s = 0,35$ ;  $MK/s = 0,085$ ) do 46,2 % (seria 1:  $w/s = 0,38$ ;  $MK/s = 0,04$ ), średnio o 39,8 % oraz wzrost krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$  od 7,8 % (seria 2:  $w/s = 0,38$ ;  $MK/s = 0,13$ ) do 36,5 % (seria 4:  $w/s = 0,51$ ;  $MK/s = 0,13$ ), średnio o 22,2 %. Z uwagi na uzyskane wartości  $f_c$  i  $K_{Ic}^S$  po 28 i 180 dniach, najlepszymi okazały się betony serii 5 o najniższym stosunku woda/spoiwo ( $w/s = 0,35$ ) oraz serii 2 o stosunkowo niskim  $w/s$  i dużym udziale dodatku metakaolinitu ( $w/s = 0,38$ ;  $MK/s = 0,13$ ).

W celu wyznaczenia funkcji aproksymujących zmiennych zależnych  $K_{Ic}^S$  i  $D_m$  oraz przeprowadzenia analizy korelacyjnej między krytycznym współczynnikiem intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$ , a wymiarem fraktalnym  $D_m$  dokonano następujących analiz statystycznych: istotności wpływu zmiennych na badane cechy, jednorodności wariancji, istotności efektów, istotności współczynników funkcji aproksymujących, adekwatności funkcji oraz regresji wielokrotnej. Analizy statystyczne przeprowadzono przy poziomie istotności 0,05.

Na podstawie analizy istotności wpływu wielkości wejściowych ( $w/s$  i  $MK/s$ ) na wielkości wyjściowe  $K_{Ic}^S$  i  $D_m$  (korelacja kwalitatywna) wykazano wysoce istotny wpływ  $w/s$  i  $MK/s$  na zmianę wartości  $K_{Ic}^S$  i  $D_m$ , a jednocześnie stwierdzono różność wartości średnich  $K_{Ic}^S$  i  $D_m$  w poszczególnych seriach betonów. Wykazanie, przy uwzględnieniu rozrzutu wyników, statystycznej różności średnich  $K_{Ic}^S$  i  $D_m$  potwierdza możliwość wykorzystywania tego typu badań, wykazując wystarczającą czułość zastosowanych metod oraz potwierdza możliwość wnioskowania na podstawie uzyskanych wyników.

Statystyczną równość wariancji wartości  $K_{Ic}^S$  i  $D_m$  potwierdziły wyniki testu jednorodności wariancji Browna-Forsythe'a.

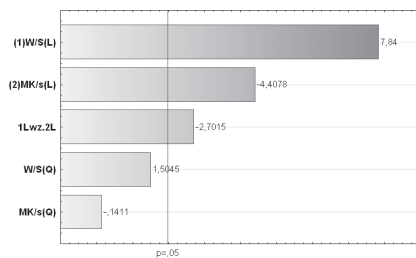
W przyjętym centralnym kompozycyjnym planie badań wstępnie funkcja aproksymująca ma postać wielomianu drugiego stopnia z interakcjami pierwszego rzędu. W celu wyeliminowania efektów nieistotnych, na przyjętym poziomie istotności 0,05, dokonano analizy wariancji ANOVA. Wyniki analizy istotności efektów w przypadku wymiaru fraktalnego  $D_m$  prezentuje wykres Pareto (rys. 1). Wykres Pareto pokazuje estymatory efektów posortowane według ich wartości bezwzględnej, a pionowa linia oznacza minimalną wartość statystycznie istotnego efektu. W przypadku wymiaru fraktalnego  $D_m$  wykazano istotność liniowych efektów głównych obu zmiennych ( $w/s$  i  $MK/s$ ) oraz efektu współdziałania. W przypadku  $K_{Ic}^S$  wykazano jedynie istotność obu efektów liniowych. Efekty nieistotne usunięto i przeprowadzono analizę istotności współczynników funkcji aproksymujących. Adekwatności funkcji stwierdzono na podstawie wyników testu F.

Ostatecznie uzyskano modele regresji postaci (rys. 2):

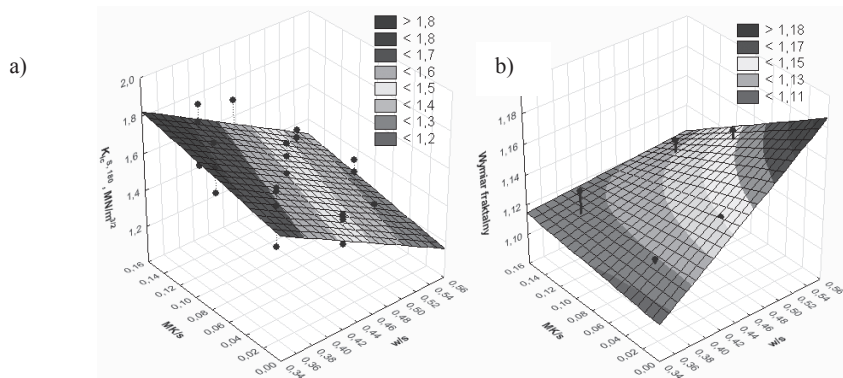
$$K_{lc}^{S,180} = 2,450 - 2,298 \cdot w/s + 0,969 \cdot MK/s \quad (1)$$

$$D_m = 0,978 + 0,371 \cdot w/s + 0,775 \cdot MK/s - 2,094 \cdot w/s \cdot MK/s \quad (2)$$

Współczynnik korelacji modelu (1), po uwzględnieniu wszystkich wyników, wynosi 0,816, natomiast dla wartości średnich 0,992. W przypadku modelu (2) wynosi on odpowiednio, dla wszystkich wyników 0,575 oraz dla wartości średnich 0,856.



Rys. 1. Wykres Pareto efektów standaryzowanych w przypadku analizy wymiaru fraktalnego  $D_m$ .



Rys. 2. Wykresy powierzchniowe zależności  $K_{lc}^S$  (po lewej) i wymiaru fraktalnego  $D_m$  (po prawej) od zmiennych  $w/s$  i  $MK/s$ .

Zwiększenie stosunku woda/spoiwo skutkowało spadkiem krytycznego współczynnika intensywności naprężeń, natomiast wzrost udziału dodatku  $MK$  powodował wzrost  $K_{lc}^S$  (rys. 2a). Wartości standaryzowanych współczynników regresji  $b^*$  (Tab. 3), otrzymane w analizie regresji wielokrotnej, świadczą o prawie 3,5 krotnie większym wkładzie zmiennej  $w/s$ , aniżeli  $MK/s$  w predykcję krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{lc}^S$ .

Na podstawie badań fraktalnych stwierdzono, że zwiększenie stosunku woda/spoiwo, w betonach z niewielkim udziałem metakaolinitu, skutkowało zwiększeniem wymiaru fraktalnego linii profilowych. Wpływ dodatku  $MK$  na zmniejszenie chropowatości linii profilowych (mniejszy wymiar fraktalny  $D_m$ ) uwidacznia się zwłaszcza w przypadku większych wartości  $w/s$  (rys. 2b).

Większą chropowatość betonów o wyższym stosunku woda/spoiwo można tłumaczyć większą porowatością produktów hydratacji, co potwierdziły przeprowadzone badania SEM. Zaczyn przy niższych wartościach  $w/s$  był bardziej zwarty o mniejszej porowatości. Na skutek wprowadzenia dodatku metakaolinitu, o rozmiarach ziaren około dziesięciokrotnie mniejszymi od ziaren cementu, zmniejszyła się porowatość zaczynu, co spowodowało zmniejszenie chropowatości stwardniałego zaczynu cementowego (mniejszy wymiar  $D_m$ ).

Uzyskany model (2) opisujący zmienność wymiaru fraktalnego od wielkości determinujących skład betonu modyfikowanego ( $w/s$  i  $MK/s$ ) umożliwia pominięcie

pracochłonnych i wymagających odpowiedniej aparatury analiz fraktalnych. Błąd między wartością wymiaru fraktalnego  $D_m$  obliczonego na podstawie modelu (2), a wartością średnią obliczoną, dla każdej z serii betonów wyniósł maksymalnie 1,5 %, a średnio 0,6 %.

Tabela 3. Wyniki analizy regresji wielokrotnej dla zależności (1)

Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: KlcS (MK180)						
R= 0,816 R <sup>2</sup> = 0,666 F(2,33)=32,963 p<.00000 Błąd std. estymacji: ,10843						
N=36	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(33)	p
W. wolny			2,450	0,1373	17,839	0,0000
w/s	-0,7836	0,1005	-2,298	0,2949	-7,794	0,0000
MK/s	0,2288	0,1005	0,969	0,4260	2,275	0,0295

Celem badań było stworzenie modelu statystycznego pozwalającego na określenie odporności na pękanie betonów modyfikowanych metakaolinem, użytym jako częściowy substytut cementu, bez konieczności przeprowadzania badań niszczących. Krytyczny współczynnik intensywności naprężeń uzależniono od stosunku woda/spoiwo, wpływającego na klasę betonu, oraz od wymiaru fraktalnego, ilościowo charakteryzuje powstałą w procesie pękania powierzchnię przełomu.

Analizę przeprowadzono na wartościach  $K_{lc}^S$  i  $D_m$  wyznaczonych na podstawie funkcji aproksymujących (1) i (2) metodą regresji wielokrotnej. Wykazano statystycznie istotny wpływ  $w/s$  i  $D_m$  na zmianę krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{lc}^S$  (Tab. 4). Jednocześnie stwierdzono o 40 % większy wkład zmiennej  $w/s$ , aniżeli  $D_m$  w predykcję krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{lc}^S$  (patrz wartości  $b^*$ , Tab. 4).

Tabela 4. Podsumowanie analizy regresji wielokrotnej w przypadku modelu (3)

Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: KlcS						
R= ,98921680 R <sup>2</sup> = ,97854987 F(2,6)=136,86 p<.00001 Błąd std. estymacji: ,02633						
N=9	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(6)	p
W. wolny			7,223	1,1722	6,162	0,0008
w/s	-0,5969	0,1085	-1,429	0,2598	-5,502	0,0015
Dm'	-0,4348	0,1085	-4,493	1,1209	-4,008	0,0071

Wyraz wolny i pozostałe współczynniki równania regresji wielokrotnej (model (3)) są statystycznie istotne ( $p < 0,05$ , Tab. 4), a współczynnik determinacji  $R^2 = 0,979$ . Zmienność krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{lc}^S$  wyjaśniona jest zatem zmianą stosunku woda/spoiwo i wymiaru fraktalnego w 97,9 %, a zaledwie 2,1 % stanowią inne czynniki, w tym losowe.

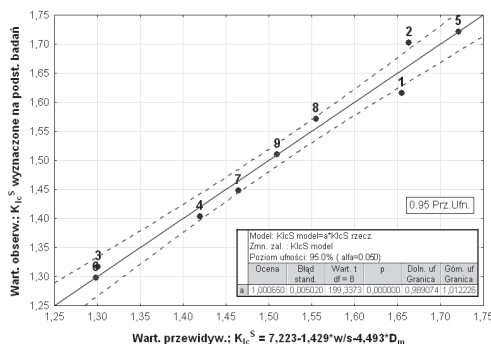
$$K_{lc}^{S,180} = 7,223 - 1,429 \cdot w/s - 4,493 \cdot D_m \quad (3)$$

Uwzględnienie w modelu (3) oprócz stosunku woda/spoiwo również wymiaru fraktalnego skutkowało poprawą współczynnika korelacji  $R$  z 0,959 na 0,989.

Na podstawie zależności (3) stwierdzono, że większą odpornością na pękanie charakteryzują się betony o niższym  $w/s$  i mniejszym skomplikowaniu powstałej na skutek zniszczenia powierzchni przełomu. Podobne relacje uzyskano również w przypadku wymiaru fraktalnego określanego metodami pudełkową i cięciwy [8,14,15].

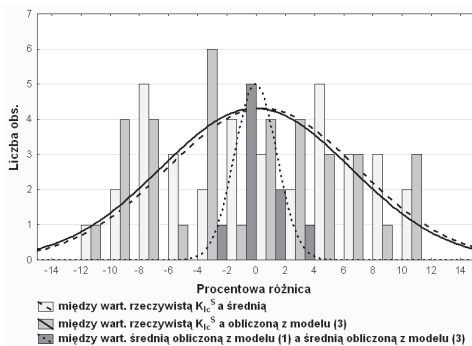
Graficzne porównanie wartości obserwowanych  $K_{lc}^S$  (wyznaczonych na podstawie badań) do przewidywanych  $K_{lc}^S$  (obliczonych z modelu (3)) wykazało dużą zgodność proponowanego rozwiązania z wynikami rzeczywistymi (rys. 3). Uzyskano zależność liniową o współczynniku kierunkowym równym 1,0 i nieistotnym wyrazie wolnym. Błąd proponowanego rozwiązania określono na podstawie analizy histogramów rozrzutu procentowego błędu (rys. 4). Wykazano, że błąd proponowanego rozwiązania (model (3)) jest zbliżony do różnic wynikających z rozrzutu pojedynczych wyników badań  $K_{lc}^S$  wokół wartości średniej. Ekstremalna procentowa różnica między rzeczywistym wynikiem badania  $K_{lc}^S$ , a wartością średnią wyniosła +11,1 oraz -12,7 % (średnio 5,7 %) Błąd proponowanego rozwiązania (model (3)) wyniósł natomiast średnio 5,8 % i mieścił się w przedziale od -10,3 do +11,3%.





Rys. 3. Zależność wartości obserwowanych  $K_{Ic}^S$  względem przewidywanych obliczonych z modelu (3).

Najlepsze dopasowanie uzyskano w wyniku porównania wyników  $K_{Ic}^S$  obliczonych z modelu (1) z wartościami  $K_{Ic}^S$  obliczonymi na podstawie modelu (3) (rys. 4). W tym przypadku uzyskano średni błąd wynoszący 1,1 %, przy wartościach ekstremalnych wynoszących odpowiednio -2,5 i +2,2 %. Uzyskane rezultaty świadczą o wiarygodności uzyskiwanych z podanych modeli przewidywanych wartości krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$  oraz możliwości praktycznego wykorzystania przedstawionego rozwiązania.



Rys. 4. Histogram rozkładu procentowych różnic wynikających z porównania wartości rzeczywistych  $K_{Ic}^S$  i wartości  $K_{Ic}^S$  obliczonych z modelu (1) lub (3).

#### 4. Podsumowanie

Przeprowadzone badania potwierdziły korzystny wpływ dodatku metakaolinitu, jako częściowego substytutu cementu, na wzrost wytrzymałości na ściskanie i odporności na pękanie betonów po 180 dniach dojrzewania oraz umożliwiły podanie zależności funkcyjnych między krytycznym współczynnikiem intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$  lub wymiarem fraktalnym  $D_m$ , a zmiennymi w planie eksperymentu ( $w/s$  i  $MK/s$ ).

Uzyskane na podstawie otrzymanych funkcji aproksymujących (model (1) i (2)) wartości krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$  i wymiaru fraktalnego  $D_m$ , określonego metodą obwiedni morfologicznych, posłużyły do uzyskania zależności (3). Zaproponowany model (3) umożliwia określenie odporności na pękanie, wyrażonej krytycznym współczynnikiem intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$ , w zależności od stosunku woda/spoiwo (dodatek metakaolinitu ujęty jako ekwiwalent cementu;  $w/s = w/(c+MK)$ ) i wymiaru fraktalnego  $D_m$ , charakteryzującego morfologię powierzchni przełomu.

Wymiar fraktalny dostarcza ilościowej informacji o powstałym na skutek pękania przełomie. Na podstawie przeprowadzonej analizy statystycznej stwierdzono, że wpływ wymiaru fraktalnego w predykcję krytycznego współczynnika intensywności naprężeń  $K_{Ic}^S$  jest znaczący i wynosi około 40% w porównaniu do wpływu stosunku woda/spoiwo. Zatem ujęcie w zaproponowanej zależności  $K_{Ic}^S - w/s$  także wymiaru fraktalnego i uzyskana w konsekwencji poprawa współczynnika korelacji potwierdza związek odporności na

pękanie z powstałą na skutek pękania powierzchnią przełomu. Potwierdzeniem wiarygodności uzyskiwanych na podstawie modelu (3) wartości  $K_{Ic}^S$  jest porównywalna wielkość błędu określenia wartości  $K_{Ic}^S$  na podstawie tego modelu z różnicą wynikającą z rozrzutów pojedynczych wyników badań  $K_{Ic}^S$ .

Przedstawione w pracy zależności (1)-(3) pozwalają na ograniczenie koniecznych informacji do przewidywania odporności na pękanie ( $K_{Ic}^S$ ) jedynie do składu betonu modyfikowanego metakaolinitem (w/s i MK/s) oraz pozwalają na pominięcie badań niszczących i pracochłonnych oraz wymagających odpowiedniej aparatury analiz fraktalnych powierzchni przełomów.

Włączenie do analizy odporności na pękanie również analizy fraktalnej może w kontekście uzyskanych pozytywnych rezultatów i dalszych badań znacząco przyczynić do wyjaśnienia procesu pękania poprzez, m.in. określenie fraktalnych typów pęknięć, uwzględniających wpływ warstwy stykowej kruszywo/zaczyn oraz samego zaczynu cementowego, a także możliwość tworzenia modelowych pęknięć fraktalnych uzależnionych od składu kompozytu betonowego.

Praca naukowa częściowo finansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki w latach 2011-2013 jako projekt badawczy nr N N507 321140.

## 5. Literatura

- 1 Mandelbrot B.B. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris, 1975.
- 2 Mandelbrot B.B. *Fractals. Form, chance and dimension*. W.H. Freeman, San Francisco, 1977.
- 3 Winslow D.N. The fractal nature of the surface of cement paste. *Cem. Concr. Res.* 15 (1985) 817-824.
- 4 Saouma V.E., Barton C.C. Fractals, fractures, and size effects in concrete. *J. Eng. Mech.* 120 (1994) 835-854.
- 5 Prokopski G., Langier B. Effect of water/cement ratio and silica fume addition on the fracture toughness and morphology of fractured surfaces of gravel concretes. *Cem. Concr. Res.* 30 (2000) 1427-1433.
- 6 Yan A., Wu K.-R., Zhang D., Yao W. Effect of fracture path on the fracture energy of high-strength concrete. *Cem. Concr. Res.* 31 (2001) 1601-1606.
- 7 Issa M.A., Issa M.A., Islam Md.S., Chudnovsky A. Fractal dimension – a measure of fracture roughness and toughness of concrete. *Eng. Fract. Mech.* 70 (2003) 125-137.
- 8 Prokopski G., Konkol J. The fractal analysis of the fracture surface of concretes made from different coarse aggregates. *Computers and Concrete* 2 (2005) 239-248.
- 9 Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., Viappiani D. Influence of the crack morphology on the fatigue crack growth rate: A continuously-kinked crack model based on fractals. *Eng. Fract. Mech.* 75 (2008) 579-589.
- 10 Ficker T. Fractal strength of cement gels and universal dimension of fracture surfaces. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 50 (2008) 167-171.
- 11 Zhang H., Wei D.M. Fractal effect and anisotropic constitutive model for concrete. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 51 (2009) 167-173.
- 12 Zhang H., Wei D.M. Fracture and damage behaviors of concrete in the fractal space. *J. Mod. Phys.* 1 (2010) 48-58.
- 13 Zhang H., Wei D.M. Estimation of fracture toughness, driving force, and fracture energy for fractal cracks using the method of imaginary smooth crack. *Eng. Fract. Mech.* 77 (2010) 621-630.
- 14 Konkol J., Prokopski G. Morfologia przełomu oraz odporność na pękanie betonów modyfikowanych dodatkiem popiołu fluidalnego lub metakaolinitu. *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Seria Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, z. 58, nr 3/11/III (2011) 321-330.
- 15 Konkol J. Wykorzystanie parametrów fraktalnych i stereologicznych do opisu odporności na pękanie betonów modyfikowanych wybranymi dodatkami typu II. *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, seria Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, z. 59, nr 3/12/III (2012) 222-232.
- 16 Brandt A.M., Prokopski G. On the fractal dimension of fracture surfaces of concrete elements. *J. Mater. Sci.* 28 (1993) 4762-4766.

- 17 Czarnecki L., Garbacz A., Kurach J. On the characterization on polymer concrete fracture surface. *Cem. Concr. Compos.* 23 (2001) 399-409.
- 18 Czarnecki L., Chmielewska B. Fracture and fractography of silane modified resin mortars. *Int. J. Restor. Build. Monum.* 9 (2003) 603-18
- 19 Erdem S., Blankson M.A. Fractal-fracture analysis and characterization of impact-fractured surface in different types of concrete using digital image analysis and 3D nanomap laser profilometry. *Constr. Build Mater.* 40 (2013) 70-76.
- 20 Wild S., Khabit J.M., Jones A., Relative strength pozzolanic activity and cement hydration in superplasticised metakaolin concrete. *Cem. Concr. Res.* 26 (1996) 1537-44.
- 21 B.B. Sabir, S. Wild, J. Bai, Metakaolin and cacinced clays as Pozzolans for concrete: a review. *Cem. Concr. Compos.* 23 (2001) 441-54.
- 22 Jones T.R. Metakaolin as a pozzolanic addition to concrete, w *Structure and Performance of Cements* (red. J. Bensted, P. Barnes). Spoon Press, London, New York 2002.
- 23 Poon C.S., Kou S.C., Lam L. Compressive strength, chloride diffusivity and pore structure of high performance metakaolin and silica fume concrete. *Constr. Build Mater.* 20 (2006) 858-865.
- 24 Siddique R., Klaus J. Influence of metakaolin on the properties of mortar and concrete: A review. *Appl. Clay Sci.* 43 (2009) 392-400.
- 25 Pavlíková M., Brtník T., Keppert M., Černý R. Wpływ metakaolinitu, jako częściowego zamiennika cementu, na właściwości zapraw wysoko-wartościowych. *Cement Wapno Beton* 9 (2009) 113-122.
- 26 Ramezaniapour A.A., Jovein H.B. Influence of metakaolin as supplementary cementing material on strength and durability of concretes. *Constr. Build Mater.* 30 (2012) 470-479.
- 27 Madandoust R., Mousavi S.Y. Fresh and hardened properties of self-compacting concrete containing metakaolin. *Constr. Build Mater.* 35 (2012) 752-760.
- 28 Dvorkin L., Bezusyak A., Lushnikova N., Ribakov Y. Using mathematical modeling for design of self compacting high strength concrete with metakaolin admixture. *Constr. Build Mater.* 37 (2012) 851-64.
- 29 Rashad A.M. Metakaolin as cementitious material: History, scours, production and composition – A comprehensive overview. *Constr. Build Mater.* 41 (2013) 303-318.
- 30 Prokopski G. *Mechanika pękania betonów cementowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2009.
- 31 Determination of fracture parameters ( $K_{Ic}$  and  $CTOD_c$ ) of plain concrete using three-point bend test. *RILEM Draft Recommendations, TC 89 - FMT Fracture Mechanics of Concrete Test Methods. Materials and Structures* 23, 1990.

## The use of fractal geometry in determination of fracture toughness of metakaolinite modified concrete

Janusz Konkol<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Materials Engineering and Technology of Building, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Rzeszow University of Technology, e-mail: janusz.konkol@prz.edu.pl*

**Abstract:** The aim of the paper is to present the results of experiments on concretes after 180 days of hardening with metakaolinite addition. Measurements of compressive strength  $f_c$ , critical stress intensity factor  $K_{Ic}^S$  and fractal dimension  $D_m$  were performed. The plan included nine measurement points. Water/binder ratios ranging from 0.35 to 0.54, and the metakaolinite additives in the amount ranging from 2.1 to 14.9 % relative to the mass of binder were used as independent variables. Statistically significant correlations were given. The proposed solutions can be used in designing the concrete with metakaolinite, which enables the prediction of  $K_{Ic}^S$  after 180 days of hardening concrete with no need for destructive tests.

**Keywords:** concrete, fracture toughness, fractal dimension, metakaolinite.